Statisitik für Sozialwissenschaftler

Bortz, J. (1999): Statistik für Sozialwissenschaftler. Berlin/Heidelberg/..: Springer

1. Kapitel: Deskriptive Statistik

Funktionen deskriptiver Statistik:

- *Tabellen und Grafiken* informieren über die gesamte Verteilungsform
- *Maße der zentralen Tendenz* (z.B. der Mitellwert) geben Kennwerte an, die die Untersuchten am besten charakterisieren
- *Dispersionsmaße* (z.B. die Streuung) kennzeichnen die Unterschiedlichkeit der Stichprobe bzw. des untersuchten Kollektivs

> Statistische Methoden zur *Beschreibung der Daten* in Form von Graphiken, Tabellen oder einzelnen Kennwerten bezeichnen wir zusammenfassend als **deskriptive Statistik**.

1.1.Meßtheoretische Vorbemerkungen

Untersuchungsgegensätnde sind niemals als Ganze, sondern immer nur repräsentiert durch deren Eigenschaften meßbar. Forschungsgegenstand sozialwissenschaftlicher Forschung sind ›Eigenschaften‹ der Menschen, was natürlich gewisse Schwierigkeiten der Meßung mit sich bringt (im Gegensatz zum einfachen Gewicht eines Steines). Aufgabe der Meßtheorie ist es, die Regeln zu erarbeiten, nach denen den Forschungsgegenständen der (Sozial-)Wissenschaften dennoch Zahlen zugeordnet werden können.

Terminologie

Das ***empirische*** und das ***numerische Relativ*** sind grundlegende Begriffe der Meßtheorie. »Unter einem *Relativ* oder *Relationensystem* versteht man eine Menge von Objekten und eine oder mehrere Relationen, mit denen die Art der Beziehung der Objekte untereinander charakterisiert wird. Formal läßt sich ein Relativ durch $<A, R_1, ..., R_n>$ beschreiben, wobei A die Menge der Objekte und $R_1, ..., R_n$ verschiedenartige Relationen darstellen.« (18)

> Das **Messen** ist eine Zuordnung von Zahlen zu Objekten oder Ereignissen, sofern diese Zuordnung eine **homomorphe Abbildung** eines empirischen Relativs in ein numerisches Relativ ist.

»Die homomorphe Abbildungsfunktion zusammen mit einem empirischen und einem numerischen Relativ bezeichnet man auch als *Skala*...« (19)

Skalenarten

Nominalskala

> Eine **Nominalskala** ordnet den Objekten eines empirischen Relativs Zahlen zu, die so geartet sind, daß Objekte mit gleicher Merkmalsausprägung mit gleiche Zahlen und Objekte mit verschiedener Merkmalsausprägung verschiedene Zahlen erhalten.

»Statistische Operationen bei nominalskalierten Merkmalen beschränken sich in der Regel darauf auszuzählen, wie viele Objekte aus A eine bestimmte Merkmalsausprägung aufweisen.« (20) Es könnte also beispielsweise *Häufigkeitsverteilungen* untersucht werden.

Ordinalskala *(Rangskala)*

> Eine **Ordinalskala** ordnet den Objekten eines empirischen Relativs Zahlen zu, die so geartet sind, daß von jeweils 2 Objekten das Objekt mit der größeren Merkmalsausprägung die größere Zahl erhält.

»Die statistische Analyse von Ordinalskalen läuft auf die Analyse von *Ranginformationen* hinaus.« (21)

Intervallskala

Im Unterschied zu den vorhergehenden Skalen werden *nicht mehr einzelne Objekte* einer Menge, sondern alle möglichen *Relationen* die aus den Objekten einer Menge A gebildet werden können. »Formal wird dieser Sachverhalt durch A x A (*kartesisches Produkt* von A) zum Ausdruck gebracht.« (21)

Eine **Intervallskala** ordnet den Objekten eines empirischen Relativs Zahlen zu, die so geartet sind, daß die Rangordnung der Zahlendifferenzen zwischen je 2 Objekten der Rangordnung der Merkmalsunterschiede zwischen je 2 Objekten entspricht.

»Mit Intervallskalen können sinnvoll Differenzen, Summen oder auch Mittelwerte berechnet werden. Die meisten der in den folgenden Kapiteln behandelten Verfahren gehen von Messungen auf Intervallskalen aus.« (23)

Verhältnisskala

»Eine Verhältnisskala setzt (typischerweise) ein empirisches Relativ mit einer sogenannten extensiven Meßstruktur voraus, die den Operator • beinhaltet.« (23)

Eine **Verhältnisskala** ordnet den Objekten eines empirischen Relativs Zahlen zu, die so geartet sind, daß das Verhältnis zwischen je 2 Zahlen dem Verhältnis der Merkmalsausprägungen der jeweiligen Objekte entspricht.

»Beispiele für Verhältnisskalen sind viele physikalische Messungen wie Längen-, Gewichts- und Zeitmessungen. Meist handelt es sich um Messungen, bei denen die Zahl ›Null‹ einen empirischen Sinn macht.« (24) »Verhältnisskalen kommen in der sozialwissenschaftlichen Forschung (mit sozialwissenschaftlichen Merkmalen) nur sehr selten vor. Demensprechend finden sie in der sozialwissenschaftlichen Statistik kaum Beachtung. Da jedoch Verhältnisskalen genauere Messungen ermöglichen als Intervalskalen, sind alle mathematischen Operationen bzw. statistischen Verfahren für Intervallskalen auch für Verhältnisskalen gültig. Man verzichtet deshalb häufig auf eine Unterscheidung der beiden Skalen und bezeichnet sie zusammengenommen als **Kardinalskalen**.« (24)

Die vier wichtigsten Skalentypen im Überblick

Skalenart	Mögliche Aussagen	Beispiele
1. Nominalskala	Gleichheit Verschiedenheit	Telefonnummern Krankheitsklassifikationen
2. Ordninalskala	Größer-kleiner-Relationen	Militärische Ränge Windstärken
3. Intervallskala	Gleichheit von Differenzen	Temperatur (z.B. Celsius) Kalenderzeit
4. Verhältnisskala	Gleichheit von Verhältnissen	Längenmessung Gewichtsmessung

Messung in den Sozialwissenschaften

Bei dem Versuch der Abbildung empirischer Sachverhalte sollte stets versucht werden, diejenige Skalenart zu wählen, die das höchste *Skalenniveau (Skalendignität)* aufweist, da das nachträgliche Transformieren auf ein höheres Skalenniveau der Daten nicht möglich ist – umgekehrt jedoch schon!

Bei der Suche nach der dem Gegenstand angemessenen Skala wird in der Regel auf eine Prüfung der Axiome verzichtet, die die Voraussetzungen zur Anwendung der einzelnen Skalen bilden. »Die meisten Messungen sind ›*Perfiat*‹-Messungen (Messungen durch ›Vertrauen‹), für die Erhebungsinstrumente (..) konstruiert werden, von denen man annimmt, sie würden das jeweilige Merkmal auf einer Intervalskala messen, so daß der gesamte statistische ›Apparat‹ für Intervallskalen (..) eingesetzt werden kann (..).

Hinter dieser ›liberalen‹ Auffassung steht die Überzeugung, daß die Bestätigung einer Forschungshypothese durch die Annahme eines falschen Skalenniveaus eher erschwert wird. Anders formuliert: Läßt sich eine inhaltliche Hypothese empirisch bestätigen, ist dies gleichzeitig ein Beleg für die Richtigkeit der skalentheoretischen Annahme.«[1] (27f)

Sozialwissenschaftliche Messung ist nie ein rein technisches, sondern stets zugleich ein theoriegeleitetes Unterfangen.

1 Eine ganz schön ›liberale Auffassung‹! Fragt sich, ob nach der Zurechtstutzung der Realität auf ein Skalenniveau überhaupt noch genug Realität übrig ist, um die Hypothese falsifizieren zu können...

1.2.Tabellarische Darstellung des Materials

Kategorisierung der Meßwerte

Zur besseren Verarbeitung werden einzelne Meßergebnisse in **Kategorien** bzw. **Intervalle** zusammengefasst, wobei sich die Frage nach einer angemessenen *Kategorienbreite* stellt. Als Faustregel von Sturges wird folgendes angegeben: Die Anzahl der Kategorien m soll nach der Beziehung

$$m \approx 1 + 3.32 \cdot lg\, n \qquad \text{(n = Kollektivgröße, lg = dekadischer Logarithmus)}$$

festgelegt werden.

Empirische Merkmalsverteilung

»Die sukzessiv summierten Kategorienhäufigkeiten werden als **kumulierte Häufikeitsverteilung** bezeichnet. Sollen zwei unterschiedlich große Kollektive hinsichtlich ihrer Merkmalsverteilung in einem Kollektiv leichter Überschaubar gemacht werden, könne die absoluten Häufigkeiten in den einzelnen Kategorien als **Prozentwerte** ausgedrückt werden.« (31) Die *kumulierte Prozentwertverteilung* muss in der letzten Kategorie den Wert 100% erhalten.

1.3.Graphische Darstellung des Materials

»Relativ leicht anzufertigende und übersichtliche Darstellungen sind das *Polygon* und das *Histogramm*, wobei das Polygon der graphischen Darstellung einer stetigen Variable und das Histogramm der graphischen Darstellung einer diskreten Variable vorbehalten bleiben sollte.« (32)

Polygon

Für die Darstellung des Polygons werden nicht die Grenzen einer Kategorie, sondern die Kategorienmitte benötigt. Diese berechnet sich aus der Addition der oberen und der unteren Kategoriengrenze und der anschließenden Division des Wertes durch 2.

Verfahren der gleitenden Durchschnitte

Theoretisch sollte die Darstellung einer kontinuierlichen Variable keine ›Knicke‹ im Graph haben; diese Knicke sollen durch ein *Interpolationsverfahren* geglättet werden, das auf der Annahme beruht, »daß sich die Häufigkeiten in benachbarten Kategorien auf einer stetigen Variable nicht sprunghaft sondern stetig ändern. (...) Zufällig bedingte Irregularitäten und Sprünge im Verlaufe eines Polygons können somit dadurch asugeglichen werden, indem statt der Häufigkeiten einer Kategorie k der Durchschnitt der Häufigkeiten der Kategorien k-1, k und k+1 eingesetzt wird. Formal ausgedrückt, erhalten wir als neuen Häufigkeitswert fk für die Kategorie k

$$f'_k = (f_{(k-1)} + f_k + f_{(k+1)})/3 \quad .$$

Da jeweils 3 benachbarte Kategorien berücksichtigt werden, bezeichnen wir diese Ausgleichung als *dreigliedrig.*« (33)

Histogramm

[sehr anschaulich, S. 34]

Verteilungsformen

»Die Graphische Darstellung einer Häufigkeitsverteilung ermöglicht es, die Verteilungsform zu beschreiben.« (34) Häufig verwendet Beschreibungsbegriffe sind: symmetrisch oder asymmetrisch; unimodal (eingipflig) oder bimodal (zweigipflig); schmalgipflig oder breitgipflig); linkssteil oder rechtssteil; U-förmig oder abfallend.

Unkorrekte Darstellungen

Vor allem die Wahl der Maßstäbe für Abszisse und Ordinate kann zu einem falschen Eindruck der Verteilungsform führen. Als Länge für die Ordinate werden ¾ der Abszissenlänge empfohlen. Beginnt eine graphische Darstellung nicht bei 0, so sollte dies durch ›zwei Striche‹ gekennzeichnet werden.

Kreisdiagramm

Das Kreisdiagramm eignet sich gut für die Darstellung von Häufigkeiten einer Nominalskala. Der Winkel, der die Größe der einzelnen Kreissektoren bestimmt, berechnet sich nach folgender Formel:

Winkel = (%(k) x 360°) / 100%.

1.4. Statistische Kennwerte

Statistische Kennwerte haben die Funktion über »*spezielle Eigenschaften der Merkmalsverteilung summarisch Auskunft zu geben*« (36).

1.4.1. Maße der zentralen Tendenz

Die Frage danach, welcher Wert die gesamte Verteilung am besten repäsentiert kann nicht eindeutig beantwortet werden – die verschiedenen Kennwerte beziehen sich auf unterschiedliche Eigenschaften der Verteilungen.

Modalwert

»Der Modalwert (Mo) einer Verteilung ist derjenige Wert, der am *häufigsten* vorkommt bzw. in der graphischen Darstellung einer Verteilung der Wert, bei dem die Verteilung ihr Maximum hat.« (37, Herv. J.G.)

Medianwert

»Suchen wir einen Wert, von dem alle übrigen Werte in der Weise abweichen, daß die Summe der Absolutbeträge der Abweichungen ein Minimum ergibt, so kann man zeigen, daß dies derjenige Wert ist, der eine Häufigkeitsverteilung halbiert (..). *Liegen* [in einer Häufigkeitsverteilung, Anm. J.G.] *über einem Wert genausoviele Fälle wie unter einem Wert, so wird dieser Wert als Median (Md) bezeichnet.*« (38)

Arithmetisches Mittel (Mittelwert)

»Das arithmetische Mittel (AM oder auch) ist das gebräuchlichste Maß zur Kennzeichnung der zentralen Tendenz einer Verteilung. Es wird berechnet, indem die Summe aller Werte durch die Anzahl aller Werte dividiert wird:

$$AM = \bar{x} = \sum x_i / n \quad .$$

Weitere Maße der zentralen Tendenz

Geometrisches Mittel

Harmonisches Mittel

Gewichtetes Mittel

Mittelwert der Mittelwerte mehrer unterschiedlich großer Kollektive oder Stichproben; die einzelnen Mittelwerte werden mit ihrer Kollektiv- bzw. Stichprobengröße gewichtet (S. 40).

1.4.2. Dispersionsmaß

»Ähneln sich 3 Verteilungen hinsichtlich ihrer zentralen Tendenz, können sie dennoch auf Grund unterschiedlicher Streuungen (Dispersionen) der einzelnen Werte stark voneinander abweichen. Während Maße der zentralen Tendenz angeben, durch welchen Wert eine Verteilung am besten repräsentiert ist, informieren die Dispersionsmaße – Variationsbreite, AD-Streuung, Varianz und Standardabweichung – über die Unterschiedlichkeit der Werte.« (41)

Variationsbreite und Perzentile

Die *Variationsbreite* wird ermittelt, in dem man die Differenz aus dem größten und dem kleinsten Wert bildet. Streut eine Verteilung sehr stark, so werden nur bestimmte *Perzentile* betrachtet. Das x-te Perzentil ist diejenige Merkmalsausprägung, die die unteren x% einer Verteilung abschneidet.

AD-Streuung

»Informationsreicher als die Streubreiten aller oder einiger Werte ist die AD-Streuung (›average-deviation‹), die den Durchschnitt der in den Absolutbeträgen gemessenen Abweichungen aller Meßwerte vom AM (arithemtischen Mittel) angibt.« (41)

Varianz und Standardabweichung

Die Summe der quadrierten Abweichungen aller Meßwerte vom arithmetischen Mittel, dividiert durch die Anzahl aller Meßwerte, ergibt die **Varianz** (s^2).

Da die Varianz (durch das Quadrieren der Werte) eine andere Einheit als die ursprünglichen Werte hat, wird die Quadrierung wieder rückgängig gemacht – der positive Wert dieser Wurzel wird als **Standardabweichung** oder *Streuung* (s) bezeichnet. Die Standardabweichung ist größer als die AD-Streuung, da bei der Standardabweichung »durch die Quadrierung größere Abweichungen überproportional stärker berücksichtigt werden als kleinere Abweichungen, während die AD-Streuung alle Abweichungen gleich behandelt« (43).

Bedeutung der Standardabweichung

Wird von einer unimodalen, symmetrischen Verteilung ausgegangen, die zudem einen glockenförmigen Verlauf aufweist, so wird diese als **Normalverteilung** bezeichnet. »Für Normalverteilungen gilt, daß zwischen den Werten [x-quer]+s und [x-quer]-s ca. • aller Fälle (genau 68,26%) liegen. Erweitern wir den Bereich auf [x-quer]± 2s, befinden sich in diesem Bereich ca. 95% (genau 95,44%) aller Fälle.« (43f)

Variationskoeffizient

»Ein weiteres Streuungsmaß, der Variationskoeffizient, relativiert die Standardabweichung am Mittelwert:

$$V = s / \bar{x} \qquad (\bar{x} > 0) \ .$$

Der Variationskoeffizient drückt damit die Standardabweichung in Mittelwerteinheiten aus. (...) Dieses Maß wird gelegentlich eingesetzt, wenn Streuungen und Verteilungen mit unterschiedlichen Mittelwerten zu vergleichen sind und Mittelwert und Streuung voneinander abhängen.« (45)

1.4.3.z-Werte

Aus dem Glossar:

»**Z-Transformation**: Ein Wert einer beliebigen Verteilung wird durch Subtraktion des *Mittelwerts* und anschließende Division durch die *Standardabweichung* der Verteilung in einen *z*-Wert transformiert. Eine *z*-transformierte Verteilung hat einen Mittelwert von 0 und eine Standardabweichung von 1. Beliebige Normalverteilungen werden durch die *z*-Transformation in die Standardnormalverteilung überführt. S. 45« (756)

Eine z-transformierte Verteilung hat einen Mittelwert von 0 und eine Streuung von 1.

1.4.4.Schiefe und Exzeß

»[D]ie Schiefe einer Verteilung [kann] durch die Positionen vom arithmetischen Mittel, Modalwert und Medianwert beschrieben werden.« (46)

»Genauer lassen sich Schiefe und Exzeß durch die sog. **Potenzmomente** (•) einer Verteilung schätzen, wobei das 3. Potenzmoment die Schiefe (•$_3$) und das 4. Potenzmoment den Exzeß (•$_4$) beschreibt (..).« (47)